Počítání s chybami -

Napsal/a: Žirafka

Datum zveřejnění: : 4. 04. 2010 v 23:32

Respektive s tolerancemi, to by asi byl správnější název, ale takto se mi zase více líbí

Před nějakou dobou jsem přemýšlela o tom, jak se vlastně změní tolerance několika spojených součástek a chtěla po kamarádovi, jestli mi to nedovede vysvětlit nějak jednoduše. Moc mi nepomohl, protože to jednoduše a univerzálně nejde. Ale tím, že mi toto řekl, mi vlastně hodně pomohl, protože teďka už vím, jak to je.

Naštěstí na to není potřebná žádná složitá matematika, stačí se jen trochu zamyslet a pak už se jen sčítá a odčítá. A občas ještě násobí a dělí, jinak nic složitého.

Takže první vzorové zadání: Jaká je celková tolerance paralelní kombinace dvou rezistorů s hodnotami R1 = 1 kΩ ± 0,1 % a R2 = 10 MΩ ± 10 % ?

Jak již bylo řečeno, neexistuje žádný univerzální vzorec či poučka. Proto musíme chvilku přemýšlet a potom trochu počítat."

1. Nejprve je potřeba zjistit, jaké jsou minimální a maximální hodnoty obou rezistorů:

Jedno procento z 1000Ω je 10Ω, čili 0,1 % je 1Ω.
Proto $R1_{min}$ = 1000 – 1 = 999 Ω a $R1_{max}$ = 1001 Ω.
Obdobně zjistíme, že $R2_{min}$ = 9 MΩ a $R2_{max}$ = 11 MΩ.

2. Spočítáme hodnotu paralelní kombinace obou minimálních a maximálních odporů:

$R_{min} = (R1_{min} \times R2_{min}) / (R1_{min} + R2_{min})$ = (999 × 9000000) / (999 + 9000000) = 8991000000 / 9000999 = 998,889 Ω

$R_{max} = (R1_{max} \times R2_{max}) / (R1_{max} + R2_{max})$ = (1001 × 11000000) / (1001 + 11000000) = 11011000000 / 11001001 = 1000,909 Ω

3. Ještě musíme spočítat hodnotu kombinace rezistorů pro jejich nominální hodnoty :

R_{th} = (R1 × R2) / (R1 + R2) = (1000 × 10000000) / (1000 + 10000000) = 999,9 Ω

4. A nyní již můžeme zjistit konečnou toleranci

$\chi = ((R_{min} - R_{th}) / R_{th}) \times 100$ = ((998,889 – 999,9) / 999,9) × 100= -0,1011 %
$\chi = ((R_{max} - R_{th}) / R_{th}) \times 100$ = ((1000,909 – 999,9) / 999,9) × 100 = 0,1009 %

A druhé vzorové zadání: Jaká je celková tolerance sériové kombinace dvou rezistorů s hodnotami R1 = 1 kΩ ± 0,1 % a R2 = 10 MΩ ± 10 % ?

1. Nejprve je potřeba zjistit, jaké jsou minimální a maximální hodnoty obou rezistorů:

Postup je úplně stejný jako v předchozím příkladu, čili $R1_{min}$ = 999 Ω, $R1_{max}$ = 1001 Ω a $R2_{min}$ = 9 MΩ a $R2_{max}$ = 11 MΩ.

2. Spočítáme hodnotu sériové kombinace obou minimálních a maximálních odporů:

$R_{min} = R1_{min} + R2_{min} = 999 + 9\,000\,000 = \underline{9000999\ \Omega}$

$R_{max} = R1_{max} + R2_{max} = 1001 + 11000000 = \underline{11001001\ \Omega}$

3. Ještě musíme spočítat hodnotu kombinace rezistorů nominálních hodnot:

$R_{th} = R1 + R2 = 1000 + 10000000 = \underline{10001000\ \Omega}$

4. A nyní již můžeme zjistit konečnou toleranci

$\chi = ((R_{min} – R_{th}) / R_{th}) \times 100 = ((9000999 – 10001000) / 10001000) \times 100 = \underline{-9{,}9990\ \%}$
$\chi = ((R_{max} – R_{th}) / R_{th}) \times 100 = ((11001001– 10001000) / 10001000) \times 100 = \underline{9{,}9990\ \%}$

Z výsledků je vidět, že paralelní spojení přesného malého a nepřesného velkého odporu výslednou hodnotu tolerance prakticky neovlivní. Naopak při sériovém spojení je toto ovlivnění velice velké. Proto je potřeba si výslednou toleranci hodnot vypočítat, jak je vidět, není to moc složité.

Bernardův matematický dodatek:

Počítání s tolerancemi není až tak složité, pokud se zabýváme lineárními obvody. Ty nám totiž umožňují, abychom si na začátku představili ideální situaci – všechny prvky s nulovou tolerancí, a do konečného stavu se dopracovali hezky krok za krokem, jako kdyby se vždy jen jeden prvek odchýlil od jmenovité hodnoty.

Řekněme, že máme odpor R1 spojen v sérii s paralelní kombinací R2 a R3. Výsledný odpor R je učeně řečeno funkcí těchto tří nezávislých hodnot:

R = f (R1, R2, R3); konkrétně R = R1 + R2 × R3 / (R2 + R3)

Změní-li se R1 o nepatrný kousek, nazvěme ho Δ (delta), a R2, R3 zůstanou nezměněny, o malinko se změní i výsledek R, poměr těchto přírůstků nazvěme citlivostí výsledného odporu na změnu hodnoty R1:

c1 = Δ / Δ = 1;

Obdobně uvažujme o změně hodnoty pouze R2 o podobný kousek Δ, také nepatrně malý:

Upravené vyjádření výsledku je teď o něco pracnější, jedná se o složený zlomek:

Teď přichází hlavní finta vyšší matematiky, a sice ta, že pokud máme v nějakém součtu nepatrnou hodnotu Δ také ve druhé nebo i vyšší mocnině, výsledek té mocniny je tak mizivý, že nemá cenu s ním vůbec uvažovat. A tak ignorujme ve jmenovateli část $\Delta^2 \times (R2 + R3)$ a máme výsledek pro c2:

Pro změnu R3 použijeme naprosto stejný postup jako pro c2 a dostáváme:

A jsme skoro u konce. Řekněme, že povolená tolerance u R1 je p1, a u dalších p2 a p3 (například p1 = 1 ± 0,05 jako 5% tolerance), výsledná odchylka té obvodové kombinace bude:

$p \times R = c1 \times p1 \times R1 + c2 \times p2 \times R2 + c3 \times p3 \times R3$

čili :

$p = (p1 \times R1 + p2 \times R2 \times R3^2/(R2+R3)^2 + p3 \times R2^2 \times R3/(R2+R3)^2) / R$;

Koho zajímá jen paralelní kombinace, dosadí si za R1 = 0, koho jen sériová, dosadí za R3 = ∞, no a podle poučky, že pranepatrné hodnoty se ignorují (a nekonečno ve jmenovateli dá tu pranepatrnou hodnotu zlomku) vyjde $p = (p1 \times R1 + p2 \times R2) / (R1 + R2)$;

A co tak zkontrolovat Žirafky sériový příklad? Nejdřív si porovnejme vyjádření tolerancí:

$\chi = ((R_{min} – R_{th}) / R_{th}) \times 100 = (R_{min} / R_{th} – 1) \times 100 = (p – 1) \times 100$ [%];

a pojďme kontrolovat:

$p = (1{,}001 \times 1\ k\Omega + 1{,}1 \times 1\ M\Omega) / (1\ k\ \Omega + 1\ M\Omega) = (1001 + 1100000)/1001000 = 1{,}0999$
χ = <u>9,99 %</u>

$p = (0{,}999 \times 1\ k\Omega + 0{,}9 \times 1\ M\Omega) / (1\ k\ \Omega + 1\ M\Omega) = (999 + 900000)/1001000 = 0{,}9001$
χ = <u>–9,99 %</u>

Zdá se, že se shodujeme, takže jsou oba postupy zřejmě správné.

Kdo neměl příležitost setkat se s vyšší matematikou, mohl teď zjistit, že to nejsou žádné velké záhady. A přitom ty citlivosti jsou vlastně derivací funkce a celkový výsledek jejím totálním diferenciálem. Zní to sice učeně, ale zas taková nebetyčná věda to není.

To, co tu v dodatku bylo uvedeno, je sice univerzální postup, ale výsledný vzoreček bude pro každé zapojení jiný. Když už ho ale pro určité zapojení máme, postup konkrétního vyčíslení pro různé hodnoty je snad o trochu pohodlnější.

PS:
χ je malé „chí“ a ne „iks“,
Rth proto, že nominální hodnoty jsou theoretické